

## УЧЕБНА ПРОГРАМА ЗА СТУДЕНТИ И ДОКТОРАНТИ

**Наименование на учебната дисциплина:** 1. МЕТОДИ ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ (МО)  
2. ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ (ЧМ)

**Област на висше образование:** 5. Технически Науки

**Хорариум:** МО 30 часа лекции (астрономически), 30 часа упражнения  
ЧМ 30 часа лекции (астрономически), 30 часа упражнения

**Титуляр на курса:** доц. д-р Васил Георгиев Гуляшки

**Предварителни изисквания (към докторантите / студентите):** Да са запознати с основите на математическия анализ и на линейната алгебра. Да имат компютърна грамотност.

### **Анотация и цели на курса „Методи за оптимизация“:**

Целта на курса е да даде знания за методите, техниките и подходите за еднокритериална оптимизация. Тези познания биха били полезни на всички, които желаят да решават оптимизационни задачи. Курсът е полезен за инженери, икономисти, лица вземащи решения при управлението на предприятия и производствени процеси, експерти в районирането, разпределението на ресурси, политическото секционно разпределение на населението, както и за всички други експерти, които решават реални оптимизационни задачи в тяхната дейност.

При еднокритериалната оптимизация се започва с условията за оптималност, последователно се разглеждат методите за решаване на оптимизационни задачи без ограничения, методите за задачи с ограничения от тип равенства, методите за задачи с ограничения от тип неравенства, методите за задачи с линейни ограничения и методите за задачи с нелинейни ограничения. Разглеждат се и метаевристични алгоритми за глобална оптимизация. Накрая се разглеждат въпроси от математическото моделиране.

### **Анотация и цели на курса „Числени методи“:**

Целта на курса е да даде знания за основни числени методи за решаване на задачи с помощта на компютър (или електронно-изчислителна машина). Тези познания са полезни за инженери, архитекти, проектантите и др. при решаването на различни математически задачи свързани с автоматизацията на проектирането, технологичните процеси и пр. Те са полезни също и в строителството при решаване на различни задачи от областите механика и статика.

Числените методи включват методи за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения, а също и методи за числено решаване на уравнения и нелинейни системи. Разглеждат се още и числени методи в задачи от теория на вероятностите и математическата статистика.

## „МЕТОДИ ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ“

### Еднокритериална оптимизация

1. Въведение в теорията на грешките при изчисления. Въведение в изчислителната линейна алгебра. Елементи на многомерния анализ  
Докторантите ще бъдат запознати: 1) с измерването на грешките, представянето на числата в електронно-изчислителната машина (компютъра), анализ на грешките в алгоритми; 2) с линейните комбинации и линейната зависимост на вектори, векторни пространства, подпространства, базис, нулево пространство, линейни преобразувания, линейни уравнения и свойства, норма на матрица, число на обусловеност на матрица, разложения на матрици; 3) с функции на множество променливи, непрекъснати функции и производните им, порядък на функция, теорема на Тейлор, апроксимация на производни с крайни разлики, скорост на сходимост на последователности;
2. Условия за оптималност  
Докторантите ще бъдат запознати : 1) с определения за екстремум на функция (силен и слаб екстремум); 2) Необходимите и достатъчни условия (НДУ) за екстремум за едномерни задачи без ограничения; 3) НДУ за екстремум за многомерни задачи без ограничения; 4) НДУ за задачи с линейни ограничения от тип равенства; 5) НДУ за задачи с линейни ограничения от тип неравенства; 6) НДУ за задачи с нелинейни ограничения от тип равенства; 7) НДУ за задачи с нелинейни ограничения от тип неравенства;
3. Методи за безусловна оптимизация
  - а) Методи за оптимизация при целева функция с една променлива  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) метод на деление на интервала на неопределеност наполовина; 2) метод на Нютон; 3) метод на секущите; 4) методи с дробна интерполация; 5) регуляризиран алгоритми; 6) метод на Фибоначи; 7) метод на Златното сечение; 8) методи с полиномиална интерполация;
  - б) Методи за негладки функции с множество променливи  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) прилагането на методи със съпоставяне стойностите на целевата функция; 2) метод на многостена; 3) преобразуване на някои негладки задачи в гладки;
  - в) Методи за гладки функции с множество променливи  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) моделната схема на алгоритмите за решаване на  $n$ -мерни задачи за безусловна оптимизация; 2) сходимостта на моделната схема; 3) изчисляването на направление на търсене и на дължината на стъпката;
  - г) Методи от втори порядък  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) метод на Нютон; 2) методи основаващи се на спектралното разложение на матрицата на Хесе; 3) методи основаващи се на факторизацията на Холецки;
  - д) Методи от първи порядък  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) Нютоновите методи с апроксимация на производните с крайни разлики; 2) Квазинютонови методи; 3) сходимост на разглежданите методи;
  - е) Методи за минимизация на гладки функции без изчисление на производни  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) методите с апроксимация на първите производни с крайни разлики; 2) Квазинютоновите методи без изчисление на производни;

- ж) Методи за решаване на задачата за най-малките квадрати  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) метод на Гаус / Нютон; 2) метод на Луенберг – Маркардт; 3) Квазинютонови методи; 4) Коригиран метод на Гаус – Нютон;
- з) Методи за решаване на задачи с голяма размерност. Метод на спрегнатите градиенти  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) Квазинютоновите методи за функции с разредени матрици на Хесе; 2) методи на спрегнатите градиенти (линеен, нелинеен и метод с рестартиране); 3) сходимост на разглежданите методи;
4. Методи за задачи с линейни ограничения
- а) Методи за търсене на екстремум при ограничения от тип равенства  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) моделната схема на алгоритмите за този клас задачи; 2) метод на най-бързото спускане; 3) методи, използващи втори производни; 4) дискретни Нютонови методи; 5) Квазинютонови методи; 6) представяне на нулевото пространство на ограниченията (LQ-факторизация и метод на изключването на променливите); 7) специални форми на целевата функция; 8) Оценка на множителите на Лагранж;
- б) Методи на активния набор за ограничения от тип линейни неравенства  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) моделната схема на алгоритмите за този клас задачи; 2) пресмятане на направлението на търсене и на дължината на стъпката; 3) интерпретация на множителите на Лагранж; 4) изчисления с промяна на работния списък;
- в) Задачи от специални типове  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) задачите на линейното програмиране; 2) задачите на квадратичното програмиране (с положително определени и със знаково неопределени проектирани матрици на Хесе); 3) линейната задача за най-малките квадрати с ограничения;
- г) Задачи с малък брой ограничения от общ вид  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) квадратичните задачи с положително определени матрици на Хесе; 2) методи, използващи втори производни за решаване на задачи от общ вид;
- д) Задачи с ограничения от специален вид  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) Оптимизация при прости ограничения на променливите; 2) задача с прости ограничения и ограничения от общ вид;
- е) Големи задачи с линейни ограничения  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) методите за решаване на големи задачи на линейното програмиране; 2) методи за решаване на големи задачи с нелинейни целеви функции и линейни ограничения; 3) търсене на начална допустима точка;
5. Задачи с нелинейни ограничения
- а) Методи на наказателните и бариерните функции  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) квадратична наказателна функция; 2) моделна схема за оптимизация с използване на гладка наказателна функция; 3) оценка на множителите на Лагранж; 4) логаритмична бариерна функция;
- б) Методи на приведените градиенти и проекции на градиентите  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) оптимизация при ограничения от тип равенства; 2) свойства на методи на приведените градиенти;
- в) Методи на модифицираните функции на Лагранж  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) методи на модифицираната функция на Лагранж; 2) моделна схема на алгоритмите с модифицирана функция на Лагранж;
- г) Методи на проектирания лагранжиан

- Докторантите ще бъдат запознати с: 1) формулиране на подзадачата; 2) опростяване на моделната схема; 3) стратегии при дефектни подзадачи;
- д) Оценки на множителите на Лагранж  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) оценки от първи порядък; 2) оценки от втори порядък; 3) оценки на множителите при ограничения – неравенства;
6. Метаевристични алгоритми за глобална оптимизация
- а) Генетични алгоритми  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) принципната схема на генетичните алгоритми; 2) видове селекция на родители; 3) видове кръстоски; 4) мутация; 5) търсене в ниши;
- б) Алгоритми от тип „Табу търсене”  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) принципната схема на алгоритмите от тип „Табу търсене”; 2) съставяне на списъци с движения – „табу”; 3) паметови структури;
- в) Алгоритми на „Симулираното закаляване”  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) принципната схема на алгоритмите от тип „Симулирано закаляване”; 2) параметри за настройка на алгоритъм от този тип;
- г) Еволюционни алгоритми  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) алгоритми на разпръснатото търсене; 2) алгоритми на рояка частици; 3) мравкови системи; 4) хибридни еволюционни алгоритми;
7. Моделиране
- а) Преобразуване на задачи  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) опростяване или изключване на ограничения; 2) тригонометрични преобразувания;
- б) Мащабиране  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) мащабиране чрез замяна на променливи; 2) мащабиране в нелинейни задачи на най-малките квадрати;
- в) Постановка на ограниченията  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) изроден случай на ограничения; 2) използване на ограничения с допуски;
- г) Задачи с дискретни и целочислени променливи  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) задачи с псевдодискретни променливи; 2) задачи с целочислени променливи;
- д) Динамично програмиране  
Докторантите ще бъдат запознати с: 1) принципната схема на метода на динамичното програмиране; 2) задачи на динамичното програмиране;

## **„ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ”**

1. Системи от линейни алгебрични уравнения
- а) Метод на Гаус (Метод на изключването)  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Гаус за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения.
- б) Метод на квадратния корен  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на квадратния корен за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения.
- в) Метод на простата итерация  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на простата итерация за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения.

- г) Метод на Зайдел  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Зайдел за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения.
  - д) Метод на Данилевски  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Данилевски за решаване на системи от линейни алгебрични уравнения.
2. Числено решаване на уравнения и нелинейни системи
- а) Метод на разполовяването  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на разполовяването на интервала.
  - б) Метод на итерациите  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на итерациите (на последователните приближения)
  - в) Метод на хордите (Метод на Регула – Фалси)  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на хордите.
  - г) Метод на допирателните (Метод на Нютон)  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Нютон.
  - д) Комбиниран метод  
Докторантите ще бъдат запознати с комбиниран метод (комбинация на метода на хордите с метода на допирателните)
  - е) Метод на итерациите за системи от нелинейни уравнения  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на итерациите за решаване на нелинейни системи
  - ж) Метод на Нютон за системи от нелинейни уравнения  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Нютон за решаване на нелинейни системи
3. Числено диференциране. Числено решаване на обикновени диференциални уравнения – задача на Коши
- а) Формули за числено диференциране чрез използване на интерполационни полиноми  
Докторантите ще бъдат запознати с формули за числено диференциране чрез използване на интерполационни полиноми.
  - б) Числено диференциране чрез използване на крайни разлики  
Докторантите ще бъдат запознати с численото намиране на производни чрез използване на крайни разлики.
  - в) Метод на Ойлер  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Ойлер за решаване на обикновени диференциални уравнения.
  - г) Метод на Рунге – Кута  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на Рунге – Кута за решаване на обикновени диференциални уравнения.
  - д) Екстраполационни методи  
Докторантите ще бъдат запознати с екстраполационни методи за решаване на обикновени диференциални уравнения.
  - е) Многостъпкови методи  
Докторантите ще бъдат запознати с многостъпкови методи за решаване на обикновени диференциални уравнения.
4. Числено интегриране
- а) Квадратурни формули на Нютон – Коутс  
Докторантите ще бъдат запознати с прилагането на квадратурните формули на Нютон – Коутс за числено интегриране.

- б) Формули на правоъгълниците и трапезите  
Докторантите ще бъдат запознати с прилагането на формулите на правоъгълниците и трапезите за числено интегриране.
- в) Формула на Симпсън  
Докторантите ще бъдат запознати с прилагането на формулата на Симпсън за числено интегриране.
- г) Квадратурни формули на Гаус  
Докторантите ще бъдат запознати с прилагането на квадратурните формули на Гаус за числено интегриране.
- 5. Числено решаване на частни диференциални уравнения
  - а) Метод на крайните разлики  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на крайните разлики за решаване на частни диференциални уравнения.
  - б) Метод на мрежите  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на мрежите за решаване на частни диференциални уравнения.
  - в) Итеративни методи  
Докторантите ще бъдат запознати с итеративни методи за решаване на частни диференциални уравнения.
  - г) Метод на крайните елементи  
Докторантите ще бъдат запознати с метода на крайните елементи.
- 6. Числени методи за задачи от теория на вероятностите и математическата статистика  
Докторантите ще бъдат запознати с някои основни методи за решаване на задачи от теория на вероятностите и математическата статистика.
  - а) Намиране на доверителни интервали за математическо очакване и дисперсия
  - б) Намиране на закона за разпределение на вероятностите на случайни величини
  - в) Тестване на хипотези
  - г) Методи Монте Карло. Генериране на равномерно разпределени случайни числа
  - д) Построяване на математически модел с помощта на метода на най-малките квадрати

### **Препоръчителна литература**

1. Dowdy S., S. Wearden, "Statistics for research", John Wiley & sons, 1983.
2. Garey M. R. and D. S. Johnson, „Computers Intractability: A guide to the theory of NP-completeness”, W. H. Freeman, San Francisco, 1979.  
Гэри М., Д. Джонсон, „Вычислительные машины и труднорешаемые задачи”, Москва „Мир”, 1982г.
3. Gill P. E., W. Murray, M. H. Wright, “Practical Optimization”, Academic Press: London, New York, Toronto, Sydney, San Francisco, 1981.  
P. Gill, W. Murray, and M. Wright, “Practical Optimization”, Academic Press, 12th edition, 2000.  
Гилл Ф. У. Мюррей, М. Райт, „Практическая оптимизация”, Москва, Мир, 1985г.
4. Goldberg D. E., *Genetic Algorithms in Search, Optimization and Machine Learning*, Addison Wesley, Reading, Mass, 1989.
5. Murtagh B. A., “Advanced Linear Programming: Computation and Practice”, McGraw-Hill International Book Company, 1981.  
Муртаф Б., „Современное линейное программирование. Теория и практика”, Москва „Мир”, 1984г.
6. Nemhauser, G. L. and L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial Optimization*, John Wiley & Sons, New York, Chichester, Brisbane, Toronto, Singapore, 1988.

7. Papadimitriou C. H. and Steiglitz K., “Combinatorial Optimization: Algorithms and Complexity”, Prentice Hall, Englewood Cliffs, N. J., 1982.  
Пападимитриу Х., К. Стайглиц, „Комбинаторна оптимизация. Алгоритми и сложност”, Издателство „Мир”, Москва, 1985г.
8. Reklaitis G. V., Ravindran A., Ragsdell K. M., *Engineering Optimization. Methods and Applications*, John Wiley and Sons, 1983.
9. Strang G., “Linear Algebra and its Applications”, Academic Press: New York, 1976.  
Г. Стренг, „Линейна алгебра и её применения”, Издателство „Мир”, Москва, 1980г.
10. Алексеев, О. Г., „Комплексное применение методов дискретной оптимизации”, Издателство „Наука”, Москва, 1987г.
11. Бертсекас, Д., „Условная оптимизация и методы множителей Лагранжа”, Издателство „Радио и связь”, Москва, 1987г.
12. Бонев, К., Н. Лалова, А. Иванов, „Математическо моделиране”, книгоиздателство „Г. Бакалов”, Варна, 1989г.
13. Бончев, Е. К. „Учебник по числени методи за допълнителна математическа подготовка на инженера”, София, 1984г.
14. Гелерт В., Х. Кестнер, З. Нойбер, „Математически енциклопедичен речник”, Държавно издателство „Наука и изкуство”, София, 1983г.
15. Деннис Дж., Р. Шнабель, „Численные методы безусловной оптимизации и решения нелинейных уравнений”, Издателство „Мир”, Москва, 1988г.
16. Димитров Б., Н. Янев, „Теория на вероятностите и математическа статистика”, издателство „Наука и изкуство”, София, 1990г.
17. Димитров Б., Н. Янев, „Вероятности и статистика”, Университетски курс, издателство „Софтех”, София, 2007г.
18. Краскевич, В. Е., К. Х. Зеленский, В. И. Гречко, „Численные методы в инженерных исследованиях”, Головное издателство издателского объединения „Вища школа”, Харьков, 1986г.
19. Стоянов, С. К. „Оптимизация на технологични обекти”, Държавно издателство „Техника”, София, 1983г.
20. Тончев, Й., „MATLAB 7, част III”, Издателство „Техника”, София, 2009г.
21. Тончев, Й., „MuPAD Новият символен мотор на MATLAB”, Издателство „Техника”, София, 2011г.
22. Форсайт Дж. М. Малкълм, К. Молър, „Компютърни методи за математически Зресмятаня”, Издателство „Наука и изкуство”, София, 1986г.
23. Химмельблау Д., „Прикладное нелинейное программирование”, Издателство „Мир”, Москва, 1975г.  
Himmelblau, D. M., “Applied Nonlinear Programming”, McGraw-Hill Book Company, 1972.
24. Ценов И., Петков П., „Матрични методи за анализ и синтез на линейни системи за автоматично управление”, Държавно издателство „Техника”, София, 1981г.
25. Шоуп Т., „Наръчник по изчислителни методи за инженери”, Държавно издателство „Техника”, София, 1983г.

Сред изброените книги най-важни са цитираните под № 3, № 13, № 20, и № 21!

### **Конспект**

#### **„МЕТОДИ ЗА ОПТИМИЗАЦИЯ”**

1. Въведение в теорията на грешките при изчисления. Въведение в изчислителната линейна алгебра. Елементи на многомерния анализ
2. Условия за оптималност
3. Методи за безусловна оптимизация
  - а) Методи за оптимизация при целева функция с една променлива
  - б) Методи за негладки функции с множество променливи
  - в) Методи за гладки функции с множество променливи

- г) Методи от втори порядък
  - д) Методи от първи порядък
  - е) Методи за минимизация на гладки функции без изчисление на производни
  - ж) Методи за решаване на задачата за най-малките квадрати
  - з) Методи за решаване на задачи с голяма размерност. Метод на спрегнатите градиенти
4. Методи за задачи с линейни ограничения
    - а) Методи за търсене на екстремум при ограничения от тип равенства
    - б) Методи на активния набор за ограничения от тип линейни неравенства
    - в) Задачи от специални типове
    - г) Задачи с малък брой ограничения от общ вид
    - д) Задачи с ограничения от специален вид
    - е) Големи задачи с линейни ограничения
  5. Задачи с нелинейни ограничения
    - а) Методи на наказателните и бариерните функции
    - б) Методи на приведените градиенти и проекции на градиентите
    - в) Методи на модифицираните функции на Лагранж
    - г) Методи на проектирания лагранжиан
    - д) Оценки на множителите на Лагранж
  6. Метаевристични алгоритми за глобална оптимизация
    - а) Генетични алгоритми
    - б) Алгоритми от тип „Табу търсене“
    - в) Алгоритми на симулираното закаляване
    - г) Еволюционни алгоритми
  7. Моделиране
    - а) Преобразуване на задачи
    - б) Мащабиране
    - в) Постановка на ограниченията
    - г) Задачи с дискретни и целочислени променливи
    - д) Динамично програмиране

### **Конспект**

#### **„ЧИСЛЕНИ МЕТОДИ“**

1. Системи от линейни алгебрични уравнения
  - а) Метод на Гаус (Метод на изключването)
  - б) Метод на квадратния корен
  - в) Метод на простата итерация
  - г) Метод на Зайдел
  - д) Метод на Данилевски
2. Числено решаване на уравнения и нелинейни системи
  - а) Метод на разполовяването
  - б) Метод на итерациите
  - в) Метод на хордите (Метод на Регула – Фалси)
  - г) Метод на допирателните (Метод на Нютон)
  - д) Комбиниран метод
  - е) Метод на итерациите за системи от нелинейни уравнения
  - ж) Метод на Нютон за нелинейни системи
3. Числено диференциране. Числено решаване на обикновени диференциални уравнения – задача на Коши



- а) Формули за числено диференциране чрез използване на интерполационни полиноми
  - б) Числено диференциране чрез използване на крайни разлики
  - в) Метод на Ойлер
  - г) Метод на Рунге – Кута
  - д) Екстраполационни методи
  - е) Многостъпкови методи
4. Числено интегриране
- а) Квадратурни формули на Нютон – Коугс
  - б) Формули на правоъгълниците и трапеците
  - в) Формула на Симпсън
  - г) Квадратурни формули на Гаус
5. Числено решаване на частни диференциални уравнения
- а) Метод на крайните разлики
  - б) Метод на мрежите
  - в) Итеративни методи
  - г) Метод на крайните елементи
6. Числени методи за задачи от теория на вероятностите и математическата статистика
- а) Намиране на доверителни интервали за математическо очакване и дисперсия
  - б) Намиране на закона за разпределение на вероятностите на случайни величини
  - в) Тестване на хипотези
  - г) Методи Монте Карло. Генериране на равномерно разпределени случайни числа
  - д) Построяване на математически модел с помощта на метода на най-малките квадрати

02.09.2013г.

Изготвил: .....  
/доц. д-р Васил Гуляшки/